

FORMULE DE FATEEV

Véronique Cohen-Aptel

§1. Introduction

On propose une preuve directe d'une formule, due à V.Fateev et collaborateurs, sur les produits des valeurs de la fonction Gamma liés aux systèmes de racines.

Soit $R \subset V$ un système de racines fini réduit irréductible de rang r dans un espace vectoriel réel V de dimension r ; on munit V d'un produit scalaire W -invariant $(\cdot|\cdot)$, W étant le groupe de Weyl et on identifie V à son dual à l'aide de ce produit, donc les racines duales $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha|\alpha)$ appartiennent à V .

On utilisera les notations standards de [B]. Choisissons une base $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq r}$ de racines simples. Suivant l'usage on dit que R est simplement lacé si la matrice de Cartan $A = ((\alpha_i|\alpha_j^\vee))_{i,j}$ est symétrique.

Soit

$$\theta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$$

la plus longue racine. On pose $\alpha_0 = -\theta$, $n_0 = 1$. Les nombres n_i coïncident avec les marques de Kac du graphe de Dynkin affine de $R^{(1)}$ dans la Table Aff 1, [K].

Soit $h = \sum_{i=0}^r n_i$ le nombre de Coxeter de R .

On pose

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha, \quad \rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha^\vee$$

On définit une fonction méromorphe

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}$$

Dans un article [F] une formule remarquable suivante a été découverte (cf. formule (66)):

1.1. Théorème (Fateev). *Supposons que R soit simplement lacé. Pour $1 \leq i \leq r$, posons*

$$\gamma(R, \alpha_i) := \prod_{\alpha > 0} \gamma((\alpha|\rho)/h)^{-(\alpha_i|\alpha)},$$

$$k(R) := \prod_{i=1}^r n_i^{n_i}$$

Alors pour tout i

$$\gamma(R, \alpha_i) = k(R)^{-1/h} n_i \quad (F)$$

Afin d'énoncer la formule pour les systèmes de racines pas forcément simplement lacés, définissons les nombres

$$\gamma'(R, \alpha_i) := \prod_{\alpha > 0} \gamma((\alpha|\rho^\vee)/h)^{-(\alpha_i|\alpha^\vee)},$$

$$\gamma''(R, \alpha_i) := \prod_{\alpha > 0} \gamma((\alpha|\rho)/h^\vee)^{-(\alpha_i^\vee|\alpha)},$$

$$k'(R) := \prod_{i=0}^r n_i^{\vee n_i},$$

$$k''(R) := \prod_{i=0}^r (n_i^{\vee\vee})^{n_i^\vee}$$

où

$$n_i^\vee = \frac{(\alpha_i|\alpha_i)n_i}{2},$$

$$n_i^{\vee\vee} := \frac{(\alpha_i|\alpha_i)n_i^\vee}{2},$$

pour $0 \leq i \leq n$,

$$h^\vee = \sum_{i=0}^n n_i^\vee.$$

Si R est simplement lacé alors $\gamma'(R, \alpha_i) = \gamma''(R, \alpha_i) = \gamma(R, \alpha_i)$ et $k'(R) = k''(R) = k(R)$.

1.2. Théorème, [ABFKR]. *Pour tout i ,*

(i)

$$\gamma'(R, \alpha_i) = k'(R)^{-1/h} n_i^\vee \quad (F')$$

(ii)

$$\gamma''(R, \alpha_i) = k''(R)^{-1/h^\vee} n_i^{\vee\vee} \quad (F'')$$

Les physiciens déduisent ces formules des arguments très intéressants et très indirects; ils s'appuyent sur l'Ansatz de Bethe. Dans cette note on les vérifie n'en utilisant que deux propriétés fondamentales de la fonction Gamma:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (C)$$

et

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(x + i/n) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-nx+1/2} \Gamma(nx) \quad (M)$$

Le fait que ces formules sont déduisables à partir de relations (C) et (M) donne lieu aux conséquences arithmétiques, liées aux sommes de Jacobi. Pour leur discussion le lecteur est renvoyé à [CS].

§2. Preuves: cas simplement lacé

On va vérifier la formule de Fateev cas par cas. On présente les nombres $\gamma(R, \alpha_i)$ sous une forme explicite

$$\gamma(R, \alpha_i) = \prod_{j=1}^{h-1} \gamma(j/h)^{a_j} = \prod_{j=1}^{h-1} \Gamma(j/h)^{b_j},$$

en employant les Planches de [B]. Ensuite, à l'aide de (C) et (M) on montre qu'ils sont égaux à $n_i k(R)^{-1/h}$.

On notera la formule (M) pour n spécifique par $M(n)$.

On des formules évidentes

$$\gamma(x)\gamma(1-x) = 1; \quad \gamma(1/2) = 1 \quad (2.1)$$

Pour simplifier (et visualiser) l'écriture, on utilisera la notation abrégée:

$$\{a\} := \gamma(a/h), \quad [a] = \Gamma(a/h), \quad (2.2)$$

où pour chaque série R ci-dessous $h = h(R)$.

Systèmes de type A_n , $n \geq 2$

$h = n + 1$. $\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, donc tout $n_i = 1$ et $k(A_n) = 1$.

D'une autre part,

$$\gamma(A_n, \alpha_i) = \gamma(i/(n+1))^{-1} \gamma((n+1-i)/(n+1))^{-1} = 1,$$

d'où le résultat.

Systèmes de type D_n , $n \geq 3$

$$h = 2n - 2.$$

$$\theta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n,$$

d'où

$$\begin{aligned} k(D_n) &= 2^{2n-6}, \quad k(D_n)^{-1/h} = 2^{-(2n-6)/(2n-2)} \\ \gamma(D_n, \alpha_1) &= \frac{\gamma((n-2)/(2n-2))}{\gamma(1/(2n-2))\gamma((n-1)/(2n-2))\gamma((2n-4)/(2n-2))} = \\ &= \frac{\{n-2\}}{\{1\}\{2n-4\}} = \frac{[2n-3][n-2][2]}{[1][n][2n-4]} \end{aligned}$$

D'après (D)

$$[n-2][2n-3] = \pi^{1/2} 2^{2/(2n-2)} [2n-4]$$

et

$$[1][n] = \pi^{1/2} 2^{(2n-4)/(2n-2)} [2],$$

d'où

$$\gamma(D_n, \alpha_1) = 2^{(6-2n)/(2n-2)} = n_1 k(D_n)^{-1/h}$$

Pour $2 \leq i \leq n-2$,

$$\begin{aligned} \gamma(D_n, \alpha_i) &= \frac{\{n-i-1\}\{2n-2i\}}{\{i\}\{n-i\}\{2n-2i-2\}\{2n-i-1\}} = \\ &= \frac{[2n-i-2][n+i-2][2i][n-i-1][2n-2i][i-1]}{[i][n-i][2n-2i-2][n+i-1][2i-2][2n-i-1]} = \\ &= 2^{4/(2n-2)} = n_i k(D_n)^{-1/h} \end{aligned}$$

(on applique (D) avec $x = i/h, (i-1)/h, (n-i)/h, (n-i-1)/h$). Finalement, pour $i = n-1, n$,

$$\begin{aligned} \gamma(D_n, \alpha_i) &= \frac{\{2\}}{\{1\}\{n-1\}\{n\}} = \gamma(D_n, \alpha_1) \\ &= 2^{(6-2n)/(2n-2)} = n_i k(D_n)^{-1/h}. \end{aligned}$$

Ceci établit (F) pour D_n .

Système de type E_6

$$h = 12.$$

$$\theta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6,$$

d'où

$$k(E_6) = 2^6 3^3$$

$$\begin{aligned}\gamma(E_6, \alpha_1) &= \left\{ \gamma\left(\frac{1}{12}\right) \gamma\left(\frac{8}{12}\right) \gamma\left(\frac{3}{12}\right)^{-1} \right\}^{-1} = \left\{ \gamma\left(\frac{1}{12}\right) \gamma\left(\frac{2}{3}\right) \gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \right\}^{-1} = \\ &= \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{12}) \Gamma(\frac{8}{12}) \Gamma(\frac{9}{12})}{\Gamma(\frac{11}{12}) \Gamma(\frac{4}{12}) \Gamma(\frac{3}{12})} \right\}^{-1}\end{aligned}$$

or d'après la formule du produit sur la fonction Γ avec $n = 3$,

$$2\pi 3^{1/4} \Gamma\left(\frac{3}{12}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{9}{12}\right)$$

Donc :

$$\gamma(E_6, \alpha_1)^{-1} = \frac{2\pi 3^{1/4} \Gamma(\frac{8}{12})}{\Gamma(\frac{5}{12}) \Gamma(\frac{11}{12}) \Gamma(\frac{4}{12})}$$

or d'après la formule de duplication :

$$2^{1/6} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{11}{12}\right)$$

et

$$2^{1/3} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$$

Donc :

$$\gamma(E_6, \alpha_1)^{-1} = \frac{2\pi 3^{1/4} \Gamma(\frac{2}{3})}{2^{1/6} \pi^{1/2} \Gamma(\frac{5}{6}) \Gamma(\frac{1}{3})} = 2^{1/2} 3^{1/4} = n_1^{-1} k^{1/h}$$

$$\gamma(E_6, \alpha_2)^{-1} = \gamma\left(\frac{5}{12}\right) \gamma\left(\frac{1}{3}\right) \gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

or :

$$2\pi 3^{1/4} \Gamma\left(\frac{3}{12}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{9}{12}\right),$$

$$2^{5/6} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{7}{12}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = 2\pi$$

et

$$2^{1/3} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\gamma(E_6, \alpha_2)^{-1} &= \frac{2\pi 3^{1/4} \Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{12}) \Gamma(\frac{7}{12}) \Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{2\pi 3^{1/4} \Gamma(\frac{1}{3})}{2^{5/6} \pi^{1/2} \Gamma(\frac{1}{6}) \Gamma(\frac{2}{3})} = \\ &= \frac{2\pi 3^{1/4} \Gamma(\frac{5}{6}) \Gamma(\frac{1}{3})}{2^{5/6} \pi^{1/2} 2\pi \Gamma(\frac{2}{3})} = 2^{-1/2} 3^{1/4} = n_2^{-1} k^{1/h}\end{aligned}$$

$$\gamma(E_6, \alpha_4)^{-1} = \gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3 \gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{5}{12}\right)^{-2}$$

or :

$$2\pi 3^{-1/4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{12}\right) \Gamma\left(\frac{11}{12}\right),$$

$$2^{1/6} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{10}{12}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{11}{12}\right)$$

et

$$2^{1/3} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$$

Donc:

$$\gamma(E_6, \alpha_4)^{-1} = 2^{1/2} 3^{-3/4} = n_4^{-1} k^{1/h}$$

Ensuite, on a

$$\gamma(E_6, \alpha_3) = \gamma(E_6, \alpha_5) = \gamma(E_6, \alpha_2)$$

et

$$\gamma(E_6, \alpha_6) = \gamma(E_6, \alpha_1),$$

ce qui implique (F) pour E_6 .

Système de type E_7

$h = 18$.

$$\theta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7,$$

d'où

$$k(E_7) = 2^6 3^2 4 = 2^8 3^2$$

$$\begin{aligned} \gamma(E_7, \alpha_1)^{-1} &= \gamma\left(\frac{6}{18}\right) \gamma\left(\frac{8}{18}\right) \gamma\left(\frac{10}{18}\right) \gamma\left(\frac{16}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{17}{18}\right) \gamma\left(\frac{3}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{5}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{1}{18}\right) = \\ &= \gamma\left(\frac{2}{18}\right) \gamma\left(\frac{3}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{5}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{6}{18}\right) = \\ &= \gamma\left(\frac{1}{9}\right) \gamma\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{5}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Or utilisant :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{6}{18}\right) &= (2\pi)^{-1} 3^{-1/6} \Gamma\left(\frac{2}{18}\right) \Gamma\left(\frac{8}{18}\right) \Gamma\left(\frac{14}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{12}{18}\right) &= (2\pi)^{-1} 3^{1/6} \Gamma\left(\frac{4}{18}\right) \Gamma\left(\frac{10}{18}\right) \Gamma\left(\frac{16}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{3}{18}\right) &= (2\pi)^{-1} 3^{-1/3} \Gamma\left(\frac{1}{18}\right) \Gamma\left(\frac{7}{18}\right) \Gamma\left(\frac{13}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{15}{18}\right) &= (2\pi)^{-1} 3^{1/3} \Gamma\left(\frac{5}{18}\right) \Gamma\left(\frac{11}{18}\right) \Gamma\left(\frac{17}{18}\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{2}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-8/9}\Gamma\left(\frac{1}{18}\right)\Gamma\left(\frac{10}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{16}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-1/9}\Gamma\left(\frac{8}{18}\right)\Gamma\left(\frac{17}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{4}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-7/9}\Gamma\left(\frac{2}{18}\right)\Gamma\left(\frac{11}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{14}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-2/9}\Gamma\left(\frac{7}{18}\right)\Gamma\left(\frac{16}{18}\right)\end{aligned}$$

On obtient :

$$\gamma(E_7, \alpha_1) = 3^{-1/3}2^{2/9} = n_1 k(E_7)^{-1/18}$$

$$\gamma(E_7, \alpha_2)^{-1} = \gamma\left(\frac{1}{18}\right)\gamma\left(\frac{10}{18}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{2}{18}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{3}{18}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{7}{18}\right)\gamma\left(\frac{14}{18}\right)\gamma\left(\frac{6}{18}\right)\gamma\left(\frac{5}{18}\right)$$

Or utilisant :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{6}{18}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{-1/6}\Gamma\left(\frac{2}{18}\right)\Gamma\left(\frac{8}{18}\right)\Gamma\left(\frac{14}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{12}{18}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{1/6}\Gamma\left(\frac{4}{18}\right)\Gamma\left(\frac{10}{18}\right)\Gamma\left(\frac{16}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{3}{18}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{-1/3}\Gamma\left(\frac{1}{18}\right)\Gamma\left(\frac{7}{18}\right)\Gamma\left(\frac{13}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{15}{18}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{1/3}\Gamma\left(\frac{5}{18}\right)\Gamma\left(\frac{11}{18}\right)\Gamma\left(\frac{17}{18}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{2}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-8/9}\Gamma\left(\frac{1}{18}\right)\Gamma\left(\frac{10}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{16}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-1/9}\Gamma\left(\frac{8}{18}\right)\Gamma\left(\frac{17}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{4}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-7/9}\Gamma\left(\frac{2}{18}\right)\Gamma\left(\frac{11}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{14}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-2/9}\Gamma\left(\frac{7}{18}\right)\Gamma\left(\frac{16}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{8}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-5/9}\Gamma\left(\frac{4}{18}\right)\Gamma\left(\frac{13}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{10}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-4/9}\Gamma\left(\frac{5}{18}\right)\Gamma\left(\frac{14}{18}\right),\end{aligned}$$

on obtient:

$$\gamma(E_7, \alpha_2) = 2^{-2/9}3^{1/3} = \gamma(E_7, \alpha_1) = n_2 k(E_7)^{-1/18}$$

$$\gamma(E_7, \alpha_3)^{-1} = \gamma\left(\frac{5}{18}\right)\gamma\left(\frac{11}{18}\right)\gamma\left(\frac{16}{18}\right)\gamma\left(\frac{15}{18}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{8}{18}\right)^{-1}$$

Or:

$$\begin{aligned}
2\pi 3^{-1/3} \Gamma\left(\frac{15}{18}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{18}\right) \Gamma\left(\frac{11}{18}\right) \Gamma\left(\frac{17}{18}\right) \\
2\pi 3^{1/3} \Gamma\left(\frac{3}{18}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{18}\right) \Gamma\left(\frac{7}{18}\right) \Gamma\left(\frac{13}{18}\right) \\
2^{8/9} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{9}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{18}\right) \Gamma\left(\frac{5}{9}\right) \\
2^{1/9} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{8}{9}\right) &= \Gamma\left(\frac{4}{9}\right) \Gamma\left(\frac{17}{18}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\gamma(E_7, \alpha_3) = 2^{-7/9} 3^{2/3} = n_3 k(E_7)^{-1/18}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(E_7, \alpha_4)^{-1} &= \gamma\left(\frac{8}{18}\right) \gamma\left(\frac{12}{18}\right) \gamma\left(\frac{15}{18}\right) \gamma\left(\frac{14}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{1}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{7}{18}\right) \gamma\left(\frac{3}{18}\right) \gamma\left(\frac{2}{18}\right) \gamma\left(\frac{5}{18}\right)^{-1} = \\
&= \gamma\left(\frac{8}{18}\right) \gamma\left(\frac{12}{18}\right) \gamma\left(\frac{14}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{1}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{7}{18}\right) \gamma\left(\frac{2}{18}\right) \gamma\left(\frac{5}{18}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Or utilisant :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{6}{18}\right) &= (2\pi)^{-1} 3^{-1/6} \Gamma\left(\frac{2}{18}\right) \Gamma\left(\frac{8}{18}\right) \Gamma\left(\frac{14}{18}\right) \\
\Gamma\left(\frac{12}{18}\right) &= (2\pi)^{-1} 3^{1/6} \Gamma\left(\frac{4}{18}\right) \Gamma\left(\frac{10}{18}\right) \Gamma\left(\frac{16}{18}\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{2}{18}\right) &= \pi^{-1/2} 2^{-8/9} \Gamma\left(\frac{1}{18}\right) \Gamma\left(\frac{10}{18}\right) \\
\Gamma\left(\frac{16}{18}\right) &= \pi^{-1/2} 2^{-1/9} \Gamma\left(\frac{8}{18}\right) \Gamma\left(\frac{17}{18}\right) \\
\Gamma\left(\frac{4}{18}\right) &= \pi^{-1/2} 2^{-7/9} \Gamma\left(\frac{2}{18}\right) \Gamma\left(\frac{11}{18}\right) \\
\Gamma\left(\frac{14}{18}\right) &= \pi^{-1/2} 2^{-2/9} \Gamma\left(\frac{7}{18}\right) \Gamma\left(\frac{16}{18}\right) \\
\Gamma\left(\frac{8}{18}\right) &= \pi^{-1/2} 2^{-5/9} \Gamma\left(\frac{4}{18}\right) \Gamma\left(\frac{13}{18}\right) \\
\Gamma\left(\frac{10}{18}\right) &= \pi^{-1/2} 2^{-4/9} \Gamma\left(\frac{5}{18}\right) \Gamma\left(\frac{14}{18}\right)
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\gamma(E_7, \alpha_4) = 2^{11/9} 3^{-1/3} = n_4 k(E_7)^{-1/18}$$

$$\gamma(E_7, \alpha_7)^{-1} = \gamma\left(\frac{12}{18}\right) \gamma\left(\frac{1}{18}\right) \gamma\left(\frac{4}{18}\right)^{-1}$$

En utilisant:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{6}{18}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{-1/6}\Gamma\left(\frac{2}{18}\right)\Gamma\left(\frac{8}{18}\right)\Gamma\left(\frac{14}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{12}{18}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{1/6}\Gamma\left(\frac{4}{18}\right)\Gamma\left(\frac{10}{18}\right)\Gamma\left(\frac{16}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{2}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-8/9}\Gamma\left(\frac{1}{18}\right)\Gamma\left(\frac{10}{18}\right) \\ \Gamma\left(\frac{16}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-1/9}\Gamma\left(\frac{8}{18}\right)\Gamma\left(\frac{17}{18}\right),\end{aligned}$$

on obtient

$$\gamma(E_7, \alpha_7) = 2^{-7/9}3^{-1/3} = n_7 k(E_7)^{-1/18}$$

Finalement,

$$\gamma(E_7, \alpha_5) = \gamma(E_7, \alpha_3)$$

et

$$\gamma(E_7, \alpha_6) = \gamma(E_7, \alpha_1),$$

ce qui implique (F) pour E_7 .

Système de type E_8

$h = 30$.

$$\theta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8,$$

d'où

$$k(E_8) = 2^2 3^2 4^2 \cdot 5 \cdot 6 = 2^7 3^3 5$$

$$\gamma(E_8, \alpha_1)^{-1} = \gamma\left(\frac{1}{30}\right)\gamma\left(\frac{23}{30}\right)\gamma\left(\frac{3}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{5}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{16}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{8}{30}\right)\gamma\left(\frac{12}{30}\right)\gamma\left(\frac{10}{30}\right)$$

Or utilisant : " la table de 5 "

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{5}{30}\right) &= (2\pi)^{-2}5^{-1/3}\Gamma\left(\frac{1}{30}\right)\Gamma\left(\frac{7}{30}\right)\Gamma\left(\frac{13}{30}\right)\Gamma\left(\frac{19}{30}\right)\Gamma\left(\frac{25}{30}\right) \\ \Gamma\left(\frac{10}{30}\right) &= (2\pi)^{-2}5^{-1/6}\Gamma\left(\frac{2}{30}\right)\Gamma\left(\frac{8}{30}\right)\Gamma\left(\frac{14}{30}\right)\Gamma\left(\frac{20}{30}\right)\Gamma\left(\frac{26}{30}\right) \\ \Gamma\left(\frac{20}{30}\right) &= (2\pi)^{-2}5^{1/6}\Gamma\left(\frac{4}{30}\right)\Gamma\left(\frac{10}{30}\right)\Gamma\left(\frac{16}{30}\right)\Gamma\left(\frac{22}{30}\right)\Gamma\left(\frac{28}{30}\right) \\ \Gamma\left(\frac{25}{30}\right) &= (2\pi)^{-2}5^{1/3}\Gamma\left(\frac{5}{30}\right)\Gamma\left(\frac{11}{30}\right)\Gamma\left(\frac{17}{30}\right)\Gamma\left(\frac{23}{30}\right)\Gamma\left(\frac{29}{30}\right)\end{aligned}$$

"la table de 3 : "

$$\Gamma\left(\frac{3}{30}\right) = (2\pi)^{-1}3^{-2/5}\Gamma\left(\frac{1}{30}\right)\Gamma\left(\frac{11}{30}\right)\Gamma\left(\frac{21}{30}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{6}{30}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{-3/10}\Gamma\left(\frac{2}{30}\right)\Gamma\left(\frac{12}{30}\right)\Gamma\left(\frac{22}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{9}{30}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{-1/5}\Gamma\left(\frac{3}{30}\right)\Gamma\left(\frac{13}{30}\right)\Gamma\left(\frac{23}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{12}{30}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{-1/10}\Gamma\left(\frac{4}{30}\right)\Gamma\left(\frac{14}{30}\right)\Gamma\left(\frac{24}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{18}{30}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{1/10}\Gamma\left(\frac{6}{30}\right)\Gamma\left(\frac{16}{30}\right)\Gamma\left(\frac{26}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{24}{30}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{1/10}\Gamma\left(\frac{8}{30}\right)\Gamma\left(\frac{18}{30}\right)\Gamma\left(\frac{28}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{27}{30}\right) &= (2\pi)^{-1}3^{2/5}\Gamma\left(\frac{9}{30}\right)\Gamma\left(\frac{19}{30}\right)\Gamma\left(\frac{29}{30}\right)
\end{aligned}$$

et : " la table de 2 "

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{2}{30}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-14/15}\Gamma\left(\frac{1}{30}\right)\Gamma\left(\frac{16}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{4}{30}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-13/15}\Gamma\left(\frac{2}{30}\right)\Gamma\left(\frac{17}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{8}{30}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-11/15}\Gamma\left(\frac{4}{30}\right)\Gamma\left(\frac{19}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{14}{30}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-8/15}\Gamma\left(\frac{7}{30}\right)\Gamma\left(\frac{22}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{16}{30}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-7/15}\Gamma\left(\frac{8}{30}\right)\Gamma\left(\frac{23}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{22}{30}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-4/15}\Gamma\left(\frac{11}{30}\right)\Gamma\left(\frac{26}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{26}{30}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-2/15}\Gamma\left(\frac{13}{30}\right)\Gamma\left(\frac{28}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{28}{30}\right) &= \pi^{-1/2}2^{-1/15}\Gamma\left(\frac{14}{30}\right)\Gamma\left(\frac{29}{30}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{10}{30}\right)}{\Gamma\left(\frac{20}{30}\right)} &= \Gamma\left(\frac{2}{30}\right)\Gamma\left(\frac{8}{30}\right)\Gamma\left(\frac{14}{30}\right)\Gamma\left(\frac{26}{30}\right)(2\pi)^{-2}5^{-1/6}. \\
\frac{\Gamma\left(\frac{25}{30}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{30}\right)} &= (2\pi)^{-2}5^{1/3}\Gamma\left(\frac{11}{30}\right)\Gamma\left(\frac{17}{30}\right)\Gamma\left(\frac{23}{30}\right)\Gamma\left(\frac{29}{30}\right). \\
\frac{\Gamma\left(\frac{27}{30}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{30}\right)} &= \Gamma\left(\frac{13}{30}\right)\Gamma\left(\frac{23}{30}\right)\Gamma\left(\frac{19}{30}\right)\Gamma\left(\frac{29}{30}\right)(2\pi)^{-2}3^{1/5}. \\
\frac{\Gamma\left(\frac{12}{30}\right)}{\Gamma\left(\frac{18}{30}\right)} &= \Gamma\left(\frac{4}{30}\right)\Gamma\left(\frac{14}{30}\right)\Gamma\left(\frac{8}{30}\right)\Gamma\left(\frac{28}{30}\right)(2\pi)^{-2}3^{1/5}.
\end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{aligned}\gamma(E_8, \alpha_1)^{-1} &= 3^{2/5} 5^{1/6} (2^{-4} \pi^{-4})^2 \Gamma\left(\frac{1}{30}\right) \Gamma\left(\frac{23}{30}\right)^3 \Gamma\left(\frac{14}{30}\right)^3 \Gamma\left(\frac{8}{30}\right)^3 \times \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{2}{30}\right) \Gamma\left(\frac{26}{30}\right) \Gamma\left(\frac{11}{30}\right) \Gamma\left(\frac{17}{30}\right) \Gamma\left(\frac{13}{30}\right) \Gamma\left(\frac{19}{30}\right) \Gamma\left(\frac{29}{30}\right) \times \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{4}{30}\right) \Gamma\left(\frac{28}{30}\right) \Gamma\left(\frac{7}{30}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{16}{30}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{22}{30}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Puis on remplace, grâce à la "table de 2", chaque expression comme :

$$\Gamma\left(\frac{1}{30}\right), \Gamma\left(\frac{23}{30}\right), \Gamma\left(\frac{11}{30}\right), \Gamma\left(\frac{17}{30}\right), \Gamma\left(\frac{13}{30}\right), \Gamma\left(\frac{19}{30}\right), \Gamma\left(\frac{29}{30}\right), \Gamma\left(\frac{7}{30}\right)$$

On a:

$$\gamma(E_8, \alpha_1)^{-1} = 2^{-62/15} 3^{2/5} 5^{1/6} \pi^{-4} \Gamma\left(\frac{2}{30}\right) \Gamma\left(\frac{4}{30}\right) \Gamma\left(\frac{8}{30}\right) \Gamma\left(\frac{14}{30}\right) \Gamma\left(\frac{16}{30}\right) \Gamma\left(\frac{22}{30}\right) \Gamma\left(\frac{26}{30}\right) \Gamma\left(\frac{28}{30}\right)$$

sachant que : grâce à la "table de 5"

$$\Gamma\left(\frac{10}{30}\right) \Gamma\left(\frac{20}{30}\right) = (2\pi)^{-4} \Gamma\left(\frac{2}{30}\right) \Gamma\left(\frac{8}{30}\right) \Gamma\left(\frac{14}{30}\right) \Gamma\left(\frac{20}{30}\right) \Gamma\left(\frac{26}{30}\right) \Gamma\left(\frac{4}{30}\right) \Gamma\left(\frac{10}{30}\right) \Gamma\left(\frac{16}{30}\right) \Gamma\left(\frac{22}{30}\right) \Gamma\left(\frac{28}{30}\right)$$

on a alors que:

$$\Gamma\left(\frac{2}{30}\right) \Gamma\left(\frac{4}{30}\right) \Gamma\left(\frac{8}{30}\right) \Gamma\left(\frac{14}{30}\right) \Gamma\left(\frac{16}{30}\right) \Gamma\left(\frac{22}{30}\right) \Gamma\left(\frac{26}{30}\right) \Gamma\left(\frac{28}{30}\right) = (2\pi)^4$$

D'où:

$$\gamma(E_8, \alpha_1) = 2^{2/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6} = n_1 k(E_8)^{-1/30}$$

$$\begin{aligned}\gamma(E_8, \alpha_2)^{-1} &= \gamma\left(\frac{1}{30}\right) \gamma\left(\frac{6}{30}\right) \gamma\left(\frac{7}{30}\right) \gamma\left(\frac{8}{30}\right) \gamma\left(\frac{17}{30}\right) \gamma\left(\frac{15}{30}\right) \gamma\left(\frac{24}{30}\right) \times \\ &\quad \times \gamma\left(\frac{2}{30}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{3}{30}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{10}{30}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{12}{30}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{21}{30}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Or réutilisant "la table de 3 et de 5", on a :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{20}{30}\right)}{\Gamma\left(\frac{10}{30}\right)} = (2\pi)^{-2} 5^{1/6} \Gamma\left(\frac{4}{30}\right) \Gamma\left(\frac{16}{30}\right) \Gamma\left(\frac{22}{30}\right) \Gamma\left(\frac{28}{30}\right)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{27}{30}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{30}\right)} = \Gamma\left(\frac{13}{30}\right) \Gamma\left(\frac{23}{30}\right) \Gamma\left(\frac{19}{30}\right) \Gamma\left(\frac{29}{30}\right) (2\pi)^{-2} 3^{1/5}.$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{9}{30}\right)}{\Gamma\left(\frac{21}{30}\right)} = \left(\Gamma\left(\frac{7}{30}\right) \Gamma\left(\frac{17}{30}\right) \Gamma\left(\frac{19}{30}\right) \Gamma\left(\frac{29}{30}\right)\right)^{-1} (2\pi)^2 3^{-3/5}.$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{18}{30}\right)}{\Gamma\left(\frac{12}{30}\right)} = \left(\Gamma\left(\frac{4}{30}\right) \Gamma\left(\frac{14}{30}\right) \Gamma\left(\frac{8}{30}\right) \Gamma\left(\frac{28}{30}\right)\right)^{-1} (2\pi)^2 3^{-1/5}.$$

On obtient:

$$\gamma(E_8, \alpha_2)^{-1} = 3^{-3/5} 5^{1/6} \frac{\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{28}{30})}{\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{29}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{2}{30})}$$

or, d'après " la table de 2 ":

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{2}{30}) &= \pi^{-1/2} 2^{-14/15} \Gamma(\frac{1}{30}) \Gamma(\frac{16}{30}) \\ \Gamma(\frac{28}{30}) &= \pi^{-1/2} 2^{-1/15} \Gamma(\frac{14}{30}) \Gamma(\frac{29}{30})\end{aligned}$$

Il s'en suit:

$$\gamma(E_8, \alpha_2) = 2^{-13/15} 3^{3/5} 5^{-1/6} = n_2 k(E_8)^{-1/30}$$

$$\gamma(E_8, \alpha_3)^{-1} = \gamma(\frac{20}{30})\gamma(\frac{24}{30})\gamma(\frac{13}{30})\gamma(\frac{7}{30})\gamma(\frac{11}{30})\gamma(\frac{15}{30})^{-1}\gamma(\frac{8}{30})^{-1}\gamma(\frac{22}{30})^{-1}$$

Or utilisant : " la table de 5 et 3 ":

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\frac{20}{30})}{\Gamma(\frac{10}{30})} &= (2\pi)^{-2} 5^{1/6} \Gamma(\frac{4}{30}) \Gamma(\frac{16}{30}) \Gamma(\frac{22}{30}) \Gamma(\frac{28}{30}) \\ \frac{\Gamma(\frac{24}{30})}{\Gamma(\frac{6}{30})} &= (2\pi)^2 3^{2/5} \Gamma(\frac{2}{30}) \Gamma(\frac{4}{30}) \Gamma(\frac{14}{30}) \Gamma(\frac{22}{30})\end{aligned}$$

on obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_3)^{-1} = 3^{2/5} 5^{1/6} \frac{\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{28}{30})\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{11}{30})}{\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{19}{30})}$$

puis on remplace, grâce à la "table de 2", chaque expression comme :

$$\Gamma(\frac{23}{30}), \Gamma(\frac{11}{30}), \Gamma(\frac{17}{30}), \Gamma(\frac{13}{30}), \Gamma(\frac{19}{30}), \Gamma(\frac{7}{30}),$$

et on obtient

$$\gamma(E_8, \alpha_3) = 2^{17/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6} = n_3 k(E_8)^{-1/30}$$

$$\gamma(E_8, \alpha_4)^{-1} = \gamma(\frac{2}{30})\gamma(\frac{3}{30})\gamma(\frac{25}{30})\gamma(\frac{11}{30})^{-1}\gamma(\frac{20}{30})^{-1}\gamma(\frac{24}{30})^{-1}\gamma(\frac{1}{30})^{-1}\gamma(\frac{4}{30})^{-1}$$

Or réutilisant : la "table de 3 et de 5" et notamment ces résultats:

$$\frac{\Gamma(\frac{10}{30})}{\Gamma(\frac{20}{30})} = \Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{26}{30})(2\pi)^{-2} 5^{-1/6}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\frac{25}{30})}{\Gamma(\frac{5}{30})} &= (2\pi)^{-2}5^{1/3}\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{29}{30}). \\ \frac{\Gamma(\frac{3}{30})}{\Gamma(\frac{27}{30})} &= (\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30}))^{-1}(2\pi)^23^{-1/5}. \\ \frac{\Gamma(\frac{6}{30})}{\Gamma(\frac{24}{30})} &= \Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{22}{30})(2\pi)^{-2}3^{-2/5},\end{aligned}$$

on obtient:

$$\gamma(E_8, \alpha_4)^{-1} = 3^{-3/5}5^{1/6}(2\pi)^{-4} \frac{\Gamma(\frac{2}{30})^2\Gamma(\frac{26}{30})^2\Gamma(\frac{14}{30})^2\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{29}{30})\Gamma(\frac{17}{30})}{\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{28}{30})}$$

Puis on remplace, grce à la " table de 2 ", chaque expression comme

$$\Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{17}{30}), \Gamma(\frac{13}{30}), \Gamma(\frac{1}{30}),$$

d'où

$$\begin{aligned}\gamma(E_8, \alpha_4)^{-1} &= 3^{-3/5}5^{1/6}(2\pi)^{-4}2^{-2/15}\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30}) \times \\ &\quad \times \Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{26}{30})\Gamma(\frac{28}{30})\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\gamma(E_8, \alpha_4) = 2^{2/15}3^{-2/5}5^{-1/6}(2\pi)^{-4}(2\pi)^4 = 2^{2/15}3^{-2/5}5^{-1/6} = n_4 k(E_8)^{-1/30}$$

$$\gamma(E_8, \alpha_5)^{-1} = \gamma(\frac{11}{30})\gamma(\frac{7}{30})^{-1}\gamma(\frac{8}{30})^{-1}\gamma(\frac{13}{30})^{-1}\gamma(\frac{16}{30})\gamma(\frac{4}{30})\gamma(\frac{6}{30})^{-1}\gamma(\frac{2}{30})^{-1}\gamma(\frac{20}{30})^{-1}\gamma(\frac{25}{30})^{-2}$$

Or utilisant : les résultats cités précédemment à savoir :

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\frac{10}{30})}{\Gamma(\frac{20}{30})} &= \Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{26}{30})(2\pi)^{-2}5^{-1/6}. \\ \frac{\Gamma(\frac{5}{30})}{\Gamma(\frac{25}{30})} &= (2\pi)^25^{-1/3}(\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{29}{30}))^{-1}. \\ \frac{\Gamma(\frac{24}{30})}{\Gamma(\frac{6}{30})} &= (\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{22}{30}))^{-1}(2\pi)^23^{2/5},\end{aligned}$$

on obtient:

$$\gamma(E_8, \alpha_5)^{-1} = 3^{2/5} 5^{-5/6} (2\pi)^4 \frac{\Gamma(\frac{16}{30}) \Gamma(\frac{28}{30}) \Gamma(\frac{8}{30})}{\Gamma(\frac{19}{30} \frac{7}{30}) \Gamma(\frac{13}{30}) \Gamma(\frac{14}{30}) \Gamma(\frac{2}{30} \frac{11}{30}) \Gamma(\frac{17}{30}) \Gamma(\frac{23}{30}) \Gamma(\frac{29}{30})^2}$$

puis on remplace, grâce à la "table de 2", chaque expression comme :

$$\Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{17}{30}), \Gamma(\frac{13}{30}), \Gamma(\frac{19}{30}), \Gamma(\frac{7}{30}), \Gamma(\frac{11}{30}), \Gamma(\frac{23}{30})$$

D'où:

$$\gamma(E_8, \alpha_5) = 3^{-2/5} 5^{5/6} 2^{-4+47/15} \pi^4 \pi^{-4} = 2^{-13/15} 3^{-2/5} 5^{5/6} = n_5 k(E_8)^{-1/30}$$

$$\gamma(E_8, \alpha_6)^{-1} = \gamma(\frac{27}{30}) \gamma(\frac{20}{30}) \gamma(\frac{14}{30}) \gamma(\frac{13}{30}) \gamma(\frac{6}{30}) \gamma(\frac{9}{30})^{-1} \gamma(\frac{15}{30})^{-1} \gamma(\frac{26}{30})^{-1}$$

Or utilisant les résultats cités précédemment à savoir:

$$\frac{\Gamma(\frac{20}{30})}{\Gamma(\frac{10}{30})} = (\Gamma(\frac{2}{30}) \Gamma(\frac{8}{30}) \Gamma(\frac{14}{30}) \Gamma(\frac{26}{30}))^{-1} (2\pi)^2 5^{1/6}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{27}{30})}{\Gamma(\frac{3}{30})} = \Gamma(\frac{13}{30}) \Gamma(\frac{23}{30}) \Gamma(\frac{19}{30}) \Gamma(\frac{29}{30}) (2\pi)^{-2} 3^{1/5}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{6}{30})}{\Gamma(\frac{24}{30})} = \Gamma(\frac{2}{30}) \Gamma(\frac{4}{30}) \Gamma(\frac{14}{30}) \Gamma(\frac{22}{30}) (2\pi)^{-2} 3^{-2/5}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{21}{30})}{\Gamma(\frac{9}{30})} = \Gamma(\frac{7}{30}) \Gamma(\frac{17}{30}) \Gamma(\frac{19}{30}) \Gamma(\frac{29}{30}) (2\pi)^{-2} 3^{3/5},$$

on obtient:

$$\gamma(E_8, \alpha_6)^{-1} = 3^{2/5} 5^{1/6} (2\pi)^{-4} \frac{\Gamma(\frac{13}{30})^2 \Gamma(\frac{23}{30}) \Gamma(\frac{19}{30})^2 \Gamma(\frac{29}{30})^2 \Gamma(\frac{4}{30})^2 \Gamma(\frac{14}{30}) \Gamma(\frac{22}{30}) \Gamma(\frac{7}{30})}{\Gamma(\frac{8}{30}) \Gamma(\frac{16}{30}) \Gamma(\frac{26}{30})^2}$$

Puis on remplace, grce à la " table de 2 ", chaque expression comme :

$$\Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{13}{30}), \Gamma(\frac{19}{30}), \Gamma(\frac{7}{30}), \Gamma(\frac{23}{30})$$

D'où :

$$\begin{aligned} \gamma(E_8, \alpha_6) &= 3^{-2/5} 5^{-1/6} (2\pi)^{-4} \pi^4 2^{-43/15} = 2^{17/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6} = \gamma(E_8, \alpha_3) = \\ &= n_6 k(E_8)^{-1/30} \end{aligned}$$

$$\gamma(E_8, \alpha_7)^{-1} = \gamma\left(\frac{9}{30}\right)\gamma\left(\frac{19}{30}\right)\gamma\left(\frac{4}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{10}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{14}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{18}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{27}{30}\right)^{-1}$$

Or utilisant les résultats cités précédemment à savoir :

$$\frac{\Gamma(\frac{20}{30})}{\Gamma(\frac{10}{30})} = (\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{26}{30}))^{-1}(2\pi)^2 5^{1/6}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{3}{30})}{\Gamma(\frac{27}{30})} = (\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30}))^{-1}(2\pi)^2 3^{-1/5}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{12}{30})}{\Gamma(\frac{18}{30})} = \Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{28}{30})(2\pi)^{-2} 3^{1/5}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{9}{30})}{\Gamma(\frac{21}{30})} = (\Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30}))^{-1}(2\pi)^2 3^{-3/5},$$

on obtient:

$$\gamma(E_8, \alpha_7)^{-1} = 3^{-3/5} 5^{1/6} \frac{\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{28}{30})\Gamma(\frac{1}{30})}{\Gamma(\frac{29}{30})\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{14}{30})}$$

et sachant que:

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{2}{30}) &= \pi^{-1/2} 2^{-14/15} \Gamma(\frac{1}{30}) \Gamma(\frac{16}{30}) \\ \Gamma(\frac{28}{30}) &= \pi^{-1/2} 2^{-1/15} \Gamma(\frac{14}{30}) \Gamma(\frac{29}{30}) \end{aligned}$$

il vient:

$$\gamma(E_8, \alpha_7) = 2^{-13/15} 3^{3/5} 5^{-1/6} = \gamma(E_8, \alpha_2) = n_7 k(E_8)^{-1/30}$$

$$\gamma(E_8, \alpha_8)^{-1} = \gamma\left(\frac{14}{30}\right)\gamma\left(\frac{18}{30}\right)\gamma\left(\frac{28}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{5}{30}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{10}{30}\right)\gamma\left(\frac{9}{30}\right)^{-1}$$

Or utilisant les résultats cités précédemment, à savoir :

$$\frac{\Gamma(\frac{10}{30})}{\Gamma(\frac{20}{30})} = \Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{26}{30})(2\pi)^{-2} 5^{-1/6}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{25}{30})}{\Gamma(\frac{5}{30})} = (2\pi)^{-2} 5^{1/3} \Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{29}{30}).$$

$$\frac{\Gamma(\frac{21}{30})}{\Gamma(\frac{9}{30})} = \Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30})(2\pi)^{-2} 3^{3/5}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{18}{30})}{\Gamma(\frac{12}{30})} = (\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{28}{30}))^{-1}(2\pi)^2 3^{-1/5},$$

on obtient:

$$\gamma(E_8, \alpha_8)^{-1} = 3^{2/5} 5^{1/6} (2\pi)^{-4} \frac{\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{26}{30})\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})^2\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{29}{30})^2\Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{14}{30})}{\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{28}{30})}$$

On remplace, grâce à la " table de 2 ", les expressions comme

$$\Gamma(\frac{11}{30}), \Gamma(\frac{17}{30}), \Gamma(\frac{23}{30}), \Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{19}{30}).$$

Il vient:

$$\gamma(E_8, \alpha_8) = 2^{2/15} 3^{-2/5} 5^{-1/6} = \gamma(E_8, \alpha_1) = n_7 k(E_8)^{-1/30}$$

Ceci établit (F) pour le système de type E_8 et termine la preuve du Théorème 1.1. \square

§3. Preuves: cas non-simplément lacé

Dans ce paragraphe on va démontrer Théorème 1.2. On utilise toujours la notation de [B], Planches à la fin du livre.

Systèmes de type B_n , $n \geq 2$

$$h = 2n.$$

$$\theta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + 2\alpha_n$$

Racines simples:

$$\alpha_0 = -\epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \alpha_n = \epsilon_n$$

Il s'en suit:

$$\begin{aligned} (n_i)_{0 \leq i \leq n} &= (1, 1, 2, 2, \dots, 2, 2), \\ (n_i^\vee)_{0 \leq i \leq n} &= (1, 1, 2, 2, \dots, 2, 1), \\ (n_i^{\vee\vee})_{0 \leq i \leq n} &= (1, 1, 2, 2, \dots, 2, 1/2), \\ h^\vee &= 2n-1 \\ k'(B_n) &= 2^{2n-4}, \quad k''(B_n) = 2^{2n-5} \end{aligned}$$

$$\gamma'(B_n, \alpha_1) = \gamma\left(\frac{n-1}{2n}\right) \gamma\left(\frac{1}{2n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-2}{2n}\right) = \gamma\left(\frac{n-1}{2n}\right) \gamma\left(\frac{1}{2n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1}$$

En sachant que

$$\Gamma\left(\frac{2}{2n}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{2-2n}{2n}}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n-2}{2n}\right) = \Gamma\left(\frac{l-1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2}{2n}},$$

on obtient

$$\gamma'(B_n, \alpha_1) = \pi^{-1/2}2^{-\frac{2}{2n}}\pi^{1/2}2^{\frac{-2+2n}{2n}} = 2^{\frac{-4+2n}{2n}} = n_1^\vee k'(B_n)^{-1/2n}$$

$$\gamma'(B_n, \alpha_n) = \gamma'(B_n, \alpha_1) = n_n^\vee k'(B_n)^{-1/2n}$$

Pour $2 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} \gamma'(B_n, \alpha_i) &= \gamma\left(\frac{n-i}{2n}\right)\gamma\left(\frac{n-i+1}{2n}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{2n-2i}{2n}\right)^{-1} \times \\ &\times \gamma\left(\frac{2n-2i+2}{2n}\right)\gamma\left(\frac{2n-i+1}{2n}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{i}{2n}\right)^{-1} \end{aligned}$$

En sachant que

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2i-2}{2n}\right) &= \Gamma\left(\frac{i-1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n+i-1}{2n}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-2-2n}{2n}} \\ \Gamma\left(\frac{2n-2i}{2n}\right) &= \Gamma\left(\frac{n-i}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{2n-i}{2n}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2i}{2n}} \\ \Gamma\left(\frac{2n-2i+2}{2n}\right) &= \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{2n-i+1}{2n}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{2-2i}{2n}} \\ \Gamma\left(\frac{2i}{2n}\right) &= \Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{i+n}{2n}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-2n}{2n}}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\gamma'(B_n, \alpha_i) = 2^{-\frac{2}{n}} = n_i^\vee k'(B_n)^{-1/2n}$$

Donc (F') est vérifiée pour le système du type B_n .

Formule (F'')

$$\gamma''(B_n, \alpha_1) = \gamma\left(\frac{2}{2n-1}\right)\gamma\left(\frac{1}{2n-1}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{2n+1}{2(2n-1)}\right)^{-1} = \gamma\left(\frac{n-1}{2n}\right)\gamma\left(\frac{1}{2n}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1}$$

En sachant que:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2}{2n-1}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2n-1}\right)\Gamma\left(\frac{2n+1}{2(2n-1)}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{3-2n}{2n-1}} \\ \Gamma\left(\frac{2n-3}{2n-1}\right) &= \Gamma\left(\frac{2n-3}{2(2n-1)}\right)\Gamma\left(\frac{2(2n-2)}{2n-1}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2}{2n-1}}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\gamma\left(\frac{n-1}{2n}\right)\gamma\left(\frac{1}{2n}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1} = \pi^{-1/2}2^{\frac{2}{2n-1}}\pi^{1/2}2^{\frac{3-2n}{2n-1}} = 2^{\frac{5-2n}{2n-1}} = n_1^{\vee\vee} k''(B_n)^{-1/(2n-1)}$$

Donc la formule (F'') est vérifiée pour $i = 1$

Vérifions maintenant la formule (F'') pour $i = n$.

$$\gamma''(B_n, \alpha_n) = \gamma\left(\frac{1}{2(2n-1)}\right)^{-2} \gamma\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 \gamma\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{-2}$$

En sachant que:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2n-1}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{4l-2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2n-1}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{2-2n}{2n-1}} \\ \Gamma\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right) &= \Gamma\left(\frac{4l-3}{2(2n-1)}\right) \Gamma\left(\frac{l-1}{2n-1}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{-1}{2n-1}}, \end{aligned}$$

il vient:

$$\gamma\left(\frac{1}{2(2n-1)}\right)^{-2} \gamma\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 \gamma\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{-2} = 2^{\frac{6-4n}{2n-1}} = n_n^{\vee\vee} k''(B_n)^{-1/(2n-1)}$$

Donc la formule (F'') est vérifiée pour $i = n$.

Pour $2 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{aligned} \gamma''(B_n, \alpha_i) &= \gamma\left(\frac{2n-2i+1}{2(2n-1)}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-2i-1}{2(2n-1)}\right) \gamma\left(\frac{2n-2i-1}{2n-1}\right)^{-1} \times \\ &\quad \times \gamma\left(\frac{2n-2i+1}{2n-1}\right) \gamma\left(\frac{2n-i}{2n-1}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{i}{2n-1}\right)^{-1} = 2^{\frac{4}{2n-1}} \end{aligned}$$

En sachant que:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2i-2}{2n-1}\right) &= \Gamma\left(\frac{i-1}{2n-1}\right) \Gamma\left(\frac{2n+2i-3}{2(2n-1)}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{2i-1-2n}{2n-1}} \\ \Gamma\left(\frac{2n-2i+1}{2n-1}\right) &= \Gamma\left(\frac{2n-i}{2n-1}\right) \Gamma\left(\frac{2n-2i+1}{2(2n-1)}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{-2i+2}{2n-1}} \\ \Gamma\left(\frac{2n-2i-1}{2n-1}\right) &= \Gamma\left(\frac{2n-2i-1}{2n-1}\right) \Gamma\left(\frac{2n-i-1}{2n-1}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{-2i}{2n-1}} \\ \Gamma\left(\frac{2i}{2n-1}\right) &= \Gamma\left(\frac{i}{2n-1}\right) \Gamma\left(\frac{2i+2n-1}{2(2n-1)}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{2i-2n+1}{2n-1}}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\gamma''(B_n, \alpha_i) = 2^{\frac{4}{2n-1}} = n_i^{\vee\vee} k''(B_n)^{-1/(2n-1)}$$

Donc la formule (F'') est vérifiée pour $2 \leq i \leq n-1$.

Donc (F'') est vérifiée pour le système du type B_n .

Systèmes de type C_n , $n \geq 2$

$h = 2n$.

$$\theta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + \alpha_n$$

Racines simples:

$$\alpha_0 = -2\epsilon_1, \alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1, \alpha_n = 2\epsilon_n$$

Il s'en suit:

$$\begin{aligned} (n_i)_{0 \leq i \leq n} &= (1, 2, 2, 2, \dots, 2, 1), \\ (n_i^\vee)_{0 \leq i \leq n} &= (2, 2, 2, 2, \dots, 2, 2), \\ (n_i^{\vee\vee})_{0 \leq i \leq n} &= (4, 2, 2, 2, \dots, 2, 4), \\ h^\vee &= 2n+2 \\ k'(C_n) &= 2^{2n}, \quad k''(C_n) = 2^{2n+2} \end{aligned}$$

Donc

$$n_i^\vee k'(C_n)^{-1/h} = 1$$

pour tout $0 \leq i \leq n$.

D'un autre côté, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \gamma'(C_n, \alpha_i) &= \gamma\left(\frac{n-i}{2n}\right) \gamma\left(\frac{n-i}{2n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-2i+1}{2n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-2i+1}{2n}\right) \times \\ &\times \gamma\left(\frac{2n-2i-1}{2n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-2i+1}{2n}\right) \gamma\left(\frac{1}{2n}\right)^2 \gamma\left(\frac{1}{2n}\right)^{-2} \gamma\left(\frac{i}{2n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-i}{2n}\right)^{-1} = 1, \end{aligned}$$

en prénant compte que

$$\gamma\left(\frac{i}{2n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-i}{2n}\right)^{-1} = \gamma\left(\frac{i}{2n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{i}{2n}\right).$$

Donc la formule (F') est vérifiée pour C_n .

Formule (F'')

Vérifions la formule (F'') pour $1 \leq i \leq n-1$.

$$\begin{aligned} \gamma''(C_n, \alpha_i) &= \gamma\left(\frac{2n-2i+2}{2(n+1)}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-2i}{2(n+1)}\right) \gamma\left(\frac{n-i}{2(n+1)}\right)^{-1} \times \\ &\times \gamma\left(\frac{i}{2(n+1)}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2n-i+1}{2(n+1)}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{n-i+1}{2(n+1)}\right) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2i}{2n+2}\right) &= \Gamma\left(\frac{i}{2n+2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1+i}{2n+2}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{2i-2n-2}{2n+2}} \\ \Gamma\left(\frac{2(n-i+1)}{2n+2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2n+2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-i+2}{2n+2}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{-2i}{2n+2}} \\ \Gamma\left(\frac{2n-2i}{2n+2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n-i}{2n+2}\right) \Gamma\left(\frac{2n+1-i}{2n+2}\right) \pi^{-1/2} 2^{\frac{-2i-2}{2n+2}} \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{2i+2}{2n+2}\right) = \Gamma\left(\frac{i+1}{2n+2}\right)\Gamma\left(\frac{l+i+2}{2n+2}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-2n}{2n+2}},$$

on obtient

$$\gamma''(C_n, \alpha_i) = 2^{\frac{-2}{n+1}} = n_i^{\vee\vee} k''(C_n)^{-1/(2n+2)},$$

$$1 \leq i \leq n-1.$$

Ensuite,

$$\gamma''(C_n, \alpha_n) = \gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{l}{2(n+1)}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)$$

Sachant que:

$$\Gamma\left(\frac{2n}{2n+2}\right) = \Gamma\left(\frac{l}{2n+2}\right)\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2}{2n+2}}$$

et

$$\Gamma\left(\frac{2}{2n+2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2n+2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2n+2}\right)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2n}{2n+2}},$$

il vient

$$\gamma''(C_n, \alpha_n) = 2^{\frac{n-1}{n+1}} = n_n^{\vee\vee} k''(C_n)^{-1/(2n+2)}$$

Donc la formule (F'') est vérifiée pour C_n .

Système de type F_4

Ce système est obtenu par "pliure" du système E_6 (le graphe de Dynkin affine dual de $F_4^{(1)}$ est $E_6^{(2)}$).

$$h = 12$$

$$\theta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$$

$$\rho = \frac{1}{2}(11\epsilon_1 + 5\epsilon_2 + 3\epsilon_3 + \epsilon_4)$$

Racines simples:

$$\alpha_0 = -\epsilon_1 - \epsilon_2; \alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, 2; \alpha_3 = \epsilon_4; \alpha_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$$

Il s'en suit:

$$(n_i)_{0 \leq i \leq 4} = (1, 2, 3, 4, 2),$$

$$(n_i^{\vee})_{0 \leq i \leq 4} = (1, 2, 3, 2, 1),$$

$$(n_i^{\vee\vee})_{0 \leq i \leq 4} = (1, 2, 3, 1, 1/2)$$

Donc $h^{\vee} = 9$,

$$k'(F_4) = 2^6 3^3 = k(E_6)$$

$$k''(F_4) = 2 \cdot 3^3$$

$$\begin{aligned}
\gamma'(F_4, \alpha_1) &= \frac{\gamma(3/12)}{\gamma(4/12)\gamma(5/12)} = \gamma(E_6, \alpha_2) = 2^{1/2}3^{-1/4} = n_1^\vee k'(F_4)^{-1/12} \\
\gamma'(F_4, \alpha_2) &= \frac{\gamma(1/12)\gamma(4/12)\gamma(5/12)^2}{\gamma(3/12)^3} = \gamma(E_6, \alpha_4) = 2^{-1/2}3^{3/4} = n_2^\vee k'(F_4)^{-1/12} \\
\gamma'(F_4, \alpha_3) &= \frac{\gamma(3/12)}{\gamma(4/12)\gamma(5/12)} = \gamma(E_6, \alpha_2) = 2^{1/2}3^{-1/4} = n_3^\vee k'(F_4)^{-1/12} \\
\gamma'(F_4, \alpha_4) &= \frac{\gamma(3/12)}{\gamma(1/12)\gamma(8/12)} = \gamma(E_6, \alpha_1) = 2^{-1/2}3^{-1/4} = n_4^\vee k'(F_4)^{-1/12}
\end{aligned}$$

La formule (F') pour F_4 est vérifiée.

Formule (F'')

On remarque que les nombres $(\alpha|\rho)$ appartiennent à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, mais pas forcément à \mathbb{Z} , d'où l'apparence de $18 = 2h^\vee$ dans certains dénominateurs.

$$\gamma''(F_4, \alpha_1) = \gamma\left(\frac{3}{18}\right)\gamma\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{7}{18}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{3}{9}\right)^{-1}$$

Or en utilisant la "table de 3":

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{3}{18}\right) &= \left(\Gamma\left(\frac{1}{18}\right)\Gamma\left(\frac{7}{18}\right)\Gamma\left(\frac{13}{18}\right)(2\pi)^{-1}3^{3/18-1/2}\right). \\
\Gamma\left(\frac{15}{18}\right) &= \left(\Gamma\left(\frac{5}{18}\right)\Gamma\left(\frac{11}{18}\right)\Gamma\left(\frac{17}{18}\right)(2\pi)^{-1}3^{15/18-1/2}\right). \\
\Gamma\left(\frac{6}{18}\right) &= \left(\Gamma\left(\frac{2}{18}\right)\Gamma\left(\frac{8}{18}\right)\Gamma\left(\frac{14}{18}\right)(2\pi)^{-1}3^{6/18-1/2}\right). \\
\Gamma\left(\frac{12}{18}\right) &= \left(\Gamma\left(\frac{4}{18}\right)\Gamma\left(\frac{10}{18}\right)\Gamma\left(\frac{16}{18}\right)(2\pi)^{-1}3^{12/18-1/2}\right).
\end{aligned}$$

et "la table de 2" :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{2}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{1/9-1}\Gamma\left(\frac{1}{18}\right)\Gamma\left(\frac{10}{18}\right) \\
\Gamma\left(\frac{4}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{2/9-1}\Gamma\left(\frac{2}{30}\right)\Gamma\left(\frac{17}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{8}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{4/9-1}\Gamma\left(\frac{4}{30}\right)\Gamma\left(\frac{19}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{10}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{5/9-1}\Gamma\left(\frac{7}{30}\right)\Gamma\left(\frac{22}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{14}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{7/9-1}\Gamma\left(\frac{8}{30}\right)\Gamma\left(\frac{23}{30}\right) \\
\Gamma\left(\frac{16}{18}\right) &= \pi^{-1/2}2^{8/9-1}\Gamma\left(\frac{11}{30}\right)\Gamma\left(\frac{26}{30}\right),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\gamma''(F_4, \alpha_1) = 3^{-1/3} 2^{8/9} = n_1^{\vee\vee} k''(F_4),$$

la formule (F'') est donc vérifiée pour $i = 1$.

Ensuite,

$$\gamma''(F_4, \alpha_2) = \gamma\left(\frac{3}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{5}{9}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{1}{18}\right) \gamma\left(\frac{7}{18}\right)$$

En utilisant les "tables de 3 et de 2", on obtient

$$\gamma''(F_4, \alpha_2) = 2^{-1/9} 3^{2/3} = n_2^{\vee\vee} k''(F_4).$$

la formule (F'') est donc vérifiée pour $i = 2$.

Ensuite,

$$\gamma''(F_4, \alpha_3) = \gamma\left(\frac{1}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{7}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{5}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{1}{3}\right) \gamma\left(\frac{5}{9}\right) \gamma\left(\frac{1}{9}\right) \gamma\left(\frac{2}{9}\right).$$

Or en utilisant les "tables de 3 et de 2", on obtient

$$\gamma''(F_4, \alpha_3) = 2^{-1/9} 3^{-1/3} = n_3^{\vee\vee} k''(F_4),$$

ce qui vérifie (F'') pour $i = 3$.

Enfin,

$$\gamma''(F_4, \alpha_4) = \gamma\left(\frac{1}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{2}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{6}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{10}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{11}{18}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{3}{18}\right) \gamma\left(\frac{5}{18}\right) \gamma\left(\frac{4}{18}\right).$$

Or en utilisant les "tables de 3 et de 2", on en déduit

$$\gamma''(F_4, \alpha_4) = 2^{-10/9} 3^{-1/3} = n_4^{\vee\vee} k''(F_4),$$

ce qui vérifie (F'') pour $i = 4$ et achève la vérification de (F'') pour le système F_4 .

Système de type G_2

Ce système est obtenu par "pliure" du système D_4 (le graphe de Dynkin affine dual de $G_2^{(1)}$ est $D_4^{(3)}$).

$$h = 6$$

$$\theta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$

Racines simples:

$$\alpha_0 = -\epsilon_1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3, \quad \alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad \alpha_2 = -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3.$$

Donc

$$\begin{aligned} (n_0, n_1, n_2) &= (1, 3, 2), \\ (n_0^\vee, n_1^\vee, n_2^\vee) &= (3, 3, 6), \\ (n_0^{\vee\vee}, n_1^{\vee\vee}, n_2^{\vee\vee}) &= (9, 3, 18). \end{aligned}$$

$$h^\vee = 12.$$

Il s'en suit:

$$\begin{aligned} k'(G_2) &= 2^2 3^6 \\ k''(G_2) &= 2^6 3^{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma'(G_2, \alpha_1) &= \frac{\gamma(2/6)}{\gamma(1/6)\gamma(4/6)} = \gamma(D_4, \alpha_1) = 2^{-1/3} = n_1^\vee k'(G_2)^{-1/6} \\ \gamma'(G_2, \alpha_2) &= \frac{\gamma(1/6)^2 \gamma(4/6)}{\gamma(2/6)^3} = \gamma(D_4, \alpha_2) = 2^{2/3} = n_2^\vee k'(G_2)^{-1/6} \end{aligned}$$

Ceci prouve (F') pour G_2 .

Vérifions maintenant la formule (F'') .

On a

$$\gamma''(G_2, \alpha_1) = \gamma\left(\frac{1}{12}\right)^{-2} \gamma\left(\frac{3}{12}\right)^3 \gamma\left(\frac{4}{12}\right) \gamma\left(\frac{5}{12}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{6}{12}\right)^{-3}$$

En utilisant:

$$2\pi 3^{1/4} \Gamma\left(\frac{3}{12}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{9}{12}\right),$$

puis:

$$\begin{aligned} 2^{1/6} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{10}{12}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{11}{12}\right) \\ 2^{1/3} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{8}{12}\right) &= \Gamma\left(\frac{4}{12}\right) \Gamma\left(\frac{10}{12}\right) \end{aligned}$$

et

$$2^{5/6} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{12}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{7}{12}\right)$$

puis :

$$\Gamma\left(\frac{2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{10}{12}\right) = 2\pi,$$

on a bien:

$$\gamma''(G_2, \alpha_1) = \gamma\left(\frac{1}{12}\right)^{-2} \gamma\left(\frac{3}{12}\right)^3 \gamma\left(\frac{4}{12}\right) \gamma\left(\frac{5}{12}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{6}{12}\right)^{-3} = 2^{-1/2} 3^{-3/4} = n_1^\vee k''(G_2)^{-1/12}$$

La formule (F'') est vérifiée pour $i = 1$.

Ensuite,

$$\gamma''(G_2, \alpha_2) = \gamma\left(\frac{1}{12}\right) \gamma\left(\frac{3}{12}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{6}{12}\right) \gamma\left(\frac{4}{12}\right)^{-1} = \gamma\left(\frac{1}{12}\right) \gamma\left(\frac{3}{12}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{4}{12}\right)^{-1}$$

En utilisant

$$2\pi 3^{1/4} \Gamma\left(\frac{3}{12}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{9}{12}\right),$$

puis

$$2^{1/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{10}{12}) = \Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})$$

$$2^{1/3}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{8}{12}) = \Gamma(\frac{4}{12})\Gamma(\frac{10}{12}),$$

on a:

$$\gamma''(G_2, \alpha_2) = \gamma(\frac{1}{12})\gamma(\frac{3}{12})^{-1}\gamma(\frac{4}{12})^{-1} = 2^{1/2}3^{1/4} = n_2^\vee k''(G_2)^{-1/12}$$

La formule (F'') est vérifiée pour $i = 2$.

Donc la formule (F'') est vérifiée pour le système G_2 .

Ainsi les formules (F') et (F'') sont vérifiées pour les systèmes du type B, C, F, G, ce qui achève la démonstration du Théorème 1.2.

Bibliographie

[ABFKR] C.Ahn, P.Baseilhac, V.A.Fateev, C.Kim, C.Rim, Reflection amplitudes in non-simply laced Toda theories and thermodynamic Bethe Ansatz, *Phys. Let.* **B481** (2000), 114 - 124.

[B] N.Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres. IV - VI.

[CS] V.Cohen-Aptel, V.Schechtman, Produits Gamma et vecteurs propres des matrices de Cartan, arXiv:1010.5945.

[F] V.A.Fateev, Normalization factors, reflection amplitudes and integrable systems, hep-th/0103014.

[K] V.G.Kac, Infinite dimensional Lie algebras.

Institut de Mathématiques, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne,
31062 Toulouse, France

vero.aptel@free.fr